Тема 3. Элементы теории игр.

Практическое занятие. Решение матричных игр. Графический метод.

Цель занятия: овладеть базовыми навыками решения задач теории игр и теории принятия решений при наличии неопределённости во внешней и внутренней экономической среде.

Задачи, реализуемые на практическом занятии: изучить основные понятия теории игр и математических основ теории принятия решений; изучить решения игровых задач графическим методом.

Методические указания

1. Прежде, чем приступить к выполнению заданий необходимо ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой, посмотреть глоссарий терминов по данной теме и презентационный материал.
2. Повторить основные определения и формулы относящиеся к теме занятия, рассмотреть решения типичных задач.

1. Матричная игра

Теория игр рассматривает социально-экономические ситуации, связанные с принятием решений, в которых, по крайней мере, два противника имеют конфликтующие цели. К числу типичных примеров теории игр относятся, например, борьба нескольких фирм за государственный заказ, обменные и торговые операции и др.

Во многих практических задачах возникают ситуации, когда требуется принять решение, не имея достаточной информации. Неизвестными могут быть как условия осуществления какой-либо операции, так и сознательные действия лиц, от которых зависит успех этой операции.

Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух сторон и результат любой операции, осуществляемой одной из сторон, зависит от действий другой стороны, называются конфликтными.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, а математическая теория, помогающая принимать рациональные решения в конфликтной ситуации, − теорией игр.

Конфликтующие стороны называются игроками, а действия, которые могут выполнять игроки, − стратегиями.

От реальной ситуации игра отличается тем, что в игре противники действуют по строго определенным правилам.

2. Алгоритм решения матричной игры

В таблице представлены варианты решения игры, заданной платежной матрицей А.

	Наличие седловой точки	**Отсутствие седловой точки**
Тип стратегии	Чистая стратегия	Смешанная стратегия
Метод решения	Решение найдено	1.Через систему уравнений. 2.Графический метод. 3.Использование симплекс-метода.

Описание алгоритма:

1. На основании анализа платёжной матрицы следует определить, существуют ли в ней доминируемые стратегии, и исключить их.

2. Найти верхнюю и нижнюю цены игры и определить, имеет ли данная игра седловую точку (нижняя цена игры должна быть равна верхней цене игры).

3. Если седловая точка существует, то оптимальными стратегиями игроков, являющимися решением игры, будут их чистые стратегии, соответствующие седловой точке. Цена игры равна верхней и нижней цены игры, которые равны между собой.

4. Если игра не имеет седловой точки, то решение игры следует искать в смешанных стратегиях. Для определения оптимальных смешанных стратегий в играх $m \times n$ следует использовать симплекс-метод, предварительно переформулировав игровую задачу в задачу линейного программирования. Представим алгоритм решения матричной игры графически.

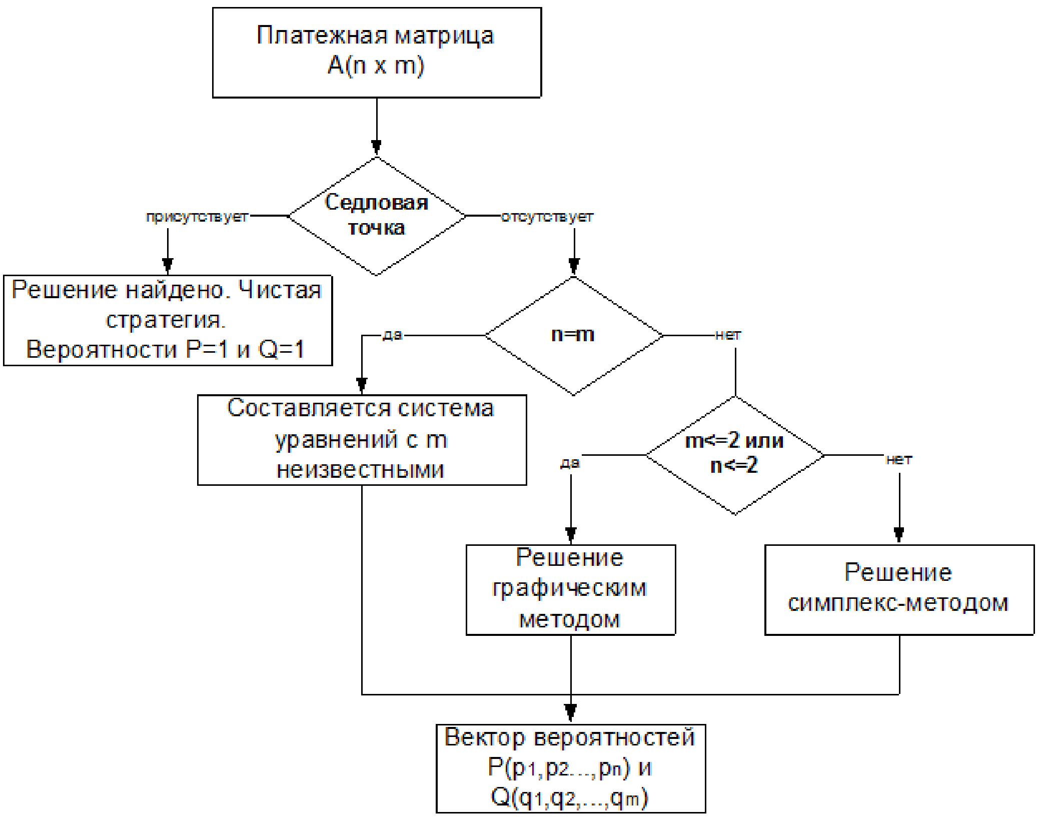


Рисунок - Схема решения матричной игры

3. Методы решения матричной игры в смешанных стратегиях

Если седловая точка отсутствует, решение игры проводят в смешанных стратегиях и решают следующими методами:

1. Решение игры через систему уравнений.

Если задана квадратная матрица $n \times n \ (n = m)$, то вектор вероятностей можно найти, решив систему уравнений. Этот метод используется не всегда и применим только в отдельных случаях (если матрица *2x2* то решение игры получается практически всегда). Если в решении получаются отрицательные вероятности, то данную систему решают симплекс-методом.

2. Решение игры графическим методом.

В случаях, когда *n=2* или *m=2*, матричную игру можно решить графически.

3. Решение матричной игры симплекс-методом.

В этом случае матричная игра сводится к задаче линейного программирования.

Решение матричных игр в чистых стратегиях

Ключевым моментом в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. Основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в условиях неопределенности, состоит в следующем: формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать единственную численную оценку каждой стратегии. Оптимальной считается та стратегия, для которой численная оценка является максимальной.

Заметим, что задание оценки каждой стратегии позволяет сравнить любые две стратегии: из двух стратегий лучшей считается та, которая имеет большую оценку (стратегии, имеющие одинаковую численную оценку, считаются эквивалентными). Таким образом, задание оценок стратегий устанавливает критерий для сравнения стратегий. Рассмотрим теперь важнейшие критерии, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

КРИТЕРИЙ ЛАПЛАСА L основан на гипотезе равновероятности применения стратегий и содержательно может быть сформулирован следующим образом: *«поскольку мы ничего не знаем о состояниях* экономической (управленческой или др.) *среды, их* (стратегии) *надо считать равновероятными»*. Иногда этот принцип называется также принципом недостаточного основания. При принятии данной гипотезы в качестве оценки стратегии *i* надо брать соответствующий ей средний выигрыш, то есть

$$L(i) = \frac{1}{m} \cdot \sum a_{ij}, \text{ где } (j = 1...m)$$

Оптимальная по данному критерию стратегия L_0 находится из условия

$$L(i_0) = \max L(i), \text{ где } (i = 1...n)$$

КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА G связан с введением числа $0 \le \alpha \le 1$, называемого «показателем пессимизма-оптимизма». Гипотеза о поведении среды состоит в том, что наихудший вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший - с вероятностью ($1-\alpha$). Тогда оценкой стратегии *i* является число $G(i)=\alpha$. При *α=1* данный критерий превращается в критерий крайнего пессимизма (критерий Вальда), а при $\alpha=0$ - в критерий крайнего оптимизма. Содержательная трудность при использовании критерия Гурвица - назначение показателя пессимизма.

КРИТЕРИЙ ВАЛЬДА V (принцип гарантированного результата) основан на гипотезе крайней осторожности (крайнего пессимизма), которая формулируется так: *«при выборе той или иной стратегии надо рассчитывать на худший из возможных вариантов»*. Если принять эту гипотезу, то оценкой стратегии *i* является число $V(i)=\min a_{ij}$, где $(j=1...m)$ Исходя из этих позиций, *1-й* игрок исследует матрицу выигрышей *A* следующим образом: для каждого значения i ($i=\overline{1,m}$) определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий *2-го* игрока

$$\min_j a_{ij} \quad (i=1,\ ...,\ m),$$

т. е. определяется минимальный выигрыш для 1-го игрока при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i=i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится следующим образом:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}. \qquad (1)$$

Выбранную с его использованием стратегию называют ***максиминной***, а полученный в результате ее применения выигрыш называют ***максиминным***, или ***нижней ценой игры.***

Число $\underline{\alpha}$, определенное по формуле (1), называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе *1-й* игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях *2-го* игрока.

Если значения функции выигрыша имеют характер потерь (то есть, фактически они являются не выигрышами, а проигрышами), то оценкой стратегии *i* для второго игрока является:

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \overline{\alpha}. \qquad (2)$$

Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле *(2)*, называется ***чистой верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш первому игроку за счет своих стратегий может гарантированно не допустить *2-й* игрок.

Применяя свои чистые стратегии, *1-й* игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а *2-й* игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш *1-го* игрока больше, чем $\overline{\alpha}$.

Максиминные стратегии игроков становятся устойчивыми, пока оба игрока их придерживаются и выигрыш одного из них равен проигрышу другого. Такая игра, где $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и ***чистую цену***игры: $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно игроков *1-го* и *2-го*, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, также соответствующей седловой точке.

Пример 3. Горный курорт предлагает четыре вида экскурсионных троп, начинающихся соответственно от I, II, III и IV уровней канатной дороги. Количество комплектов с провиантом и необходимыми приспособлениями, а также цена на них зависят от высоты, на которой расположены тропы. Причем, решение о продолжении похода и переходе на следующую тропу группа принимает в пути. Исходные данные для составления платежной матрицы игры даны в таблице.

Уровни дороги	***I***	***II***	***III***	***IV***
Комплектов, шт.	3	7	12	17
Цена, руб. за комплект	100	150	200	250

Необходимые турнаборы можно закупить перед походом по цене в 100 руб. за комплект. Определить оптимальную стратегию в закупке наборов до начала похода, если на фиксированную группу в зависимости от уровня дороги необходимо: A_1 – 3 комплекта, A_2 – 7 комплектов, A_3 – 12 комплектов, A_4 – 17 комплектов.

Решение. Для составления платежной матрицы надо рассчитать затраты на покупку турнаборов в расчете на высотность похода с учетом данных таблицы.

Обозначим высотность маршрутов в соответствии с нумерацией уровней канатной дороги: I – B_1, II – B_2, III – B_3, IV – B_4. Заполняем платежную матрицу.

Стратегии закупки	комплекты	Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I 3	II 7	III 12	IV 17
A_1	3				
A_2	7				
A_3	12				
A_4	17				

1. Для стратегии закупки A_1 рассмотрим четыре случая.

Случай A_1B_1. Затраты составят 300 (руб.).

Случай A_1B_2. При выходе на II маршрут потребуется 7 турнаборов, т. е. придется докупить 4 комплекта (к 3-м приобретенным ранее по цене 100 руб.) уже по 150 руб. за комплект. Тогда затраты составят: $3 \cdot 100 + 4 \cdot 150 = 900$ (руб.).

Случай A_1B_3. На III маршруте к закупленным 3 комплектам по 100 руб. придется докупать на месте 9 комплектов по цене 200 руб. за штуку. Затраты составят: $3 \cdot 100 + 9 \cdot 200 = 2100$ (руб.).

Случай A_1B_4. К закупленным 3-м комплектам по 100 руб. при выходе на IV маршрут необходимо докупить 14 турнаборов по 250 руб. за комплект. Затраты составят: $3 \cdot 100 + 14 \cdot 250 = 4050$ (руб.).

2. Для стратегии закупки турнаборов A_2 рассматриваем 4 случая.

Случай A_2B_1. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб., остатки использовать для пешего возвращения на базу. Затраты составят: $7 \cdot 100 = 700$ (руб.).

Случай A_2B_2. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. Затраты составят: $7 \cdot 100 = 700$ (руб.).

Случай A_2B_3. К закупленным перед выходом к 7-ми комплектам по 100 руб. за штуку при выходе на III маршрут придется докупить 5 комплектов по 200 руб. за штуку. Затраты составят: $7 \cdot 100 + 5 \cdot 200 = 1700$ (руб.).

Случай A_2B_4. Закупить перед выходом 7 комплектов по 100 руб. и в случае необходимости докупить 10 турнаборов по цене 250 руб. Затраты составят: $7 \cdot 100 + 10 \cdot 250 = 3200$ (руб.).

3. Для стратегий A_3 и A_4 в закупке турнаборов расчеты аналогичны.

Случай A_3B_1. Закупить наборы из расчета на выход к III маршруту. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_2. Аналогично. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_3. Затраты составят $12 \cdot 100 = 1200$ (руб.).

Случай A_3B_4. Закупив 12 комплектов по 100 руб., придется докупить 5 комплектов по 250 руб. за комплект. Затраты составят $12 \cdot 100 + 5 \cdot 250 = 2450$ (руб.).

Случай A_4B_1. Закупить необходимые для IV маршрута наборы до подъема по 100 руб. за комплект. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_2. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_3. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.).

Случай A_4B_4. Затраты составят $17 \cdot 100 = 1700$ (руб.). Платежная матрица составлена.

Стратегии закупки		Категории маршрутов			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		I	II	III	IV
A_1	3	300	900	2100	4050
A_2	7	700	700	1700	3200
A_3	12	1200	1200	1200	2450
A_4	17	1700	1700	1700	1700

Стратегии закупки		Категории маршрутов				minα	maxminα
		B_1	B_2	B_3	B_4		
		I	II	III	IV		
A_1	3	300	900	2100	4050	300	
A_2	7	700	700	1700	3200	700	
A_3	12	1200	1200	1200	2450	1200	
A_4	17	1700	1700	1700	1700	1700	1700
maxβ		1700	1700	2100	4050		
minmax β		1700	1700				

Нижней ценой игры будет являться значение $\alpha = \max$ (300, 700, 1200, 1700) = 1700.

Верхней ценой игры будет являться значение $\beta = \min$(1700, 1700, 2100, 4050) = 1700.

Следовательно, так как $\alpha = \beta$ игра имеет седловую точку, которая и является решением задачи. Это точка (A_4B_2). Таким образом, наличие седловой точки указывает на то, что следует производить закупку турнаборов в расчете на подъем по IV маршруту. При этом затраты не превысят 1700 рублей.

Задания для решения

1. Найти нижнюю и верхнюю цены игры с платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Для отопления помещения надо заготовить топливо. Расход топлива и цены на него зависят от погоды в зимнее время. Зима может быть мягкой, нормальной и суровой. Исходные данные для составления платежной матрицы игры в таблице.

Показатели	Зима		
	мягкая	нормальная	суровая
Расход, т	7	12	20
Цена, руб. за 1 т	200	300	400

Летом можно уголь закупить по минимальной цене 200 рублей, а неиспользованный остаток продавать весной по 100 рублей за тонну. Определите оптимальную стратегию в закупке топлива: A_1 – 7 т, A_2 – 12 т и A_3 – 20 т.

Рассчитайте оптимальные *затраты (выберите оптимальную стратегию закупки топлива*) на покупку топлива в расчете на одно помещение с учетом данных таблицы. (Обозначим состояние погоды (*стратегии погоды*) зимой: мягкая зима – B_1, нормальная – B_2, суровая – B_3.)

3. Два предприятия, производящие шкафы-купе, конкурируют между собой за рынок сбыта. Стратегии, которыми могут воспользоваться оба предприятия, заданы следующей матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 3\\ 5 & 4 & 7 & 9\\ 3 & 2 & 8 & 10\\ 1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Определите, какие стратегии являются наиболее выгодными для предприятий.

4. Генеральные директора компаний Motorola и Samsung на корпоративной вечеринке поспорили о том, чья компания останется в выигрыше при продаже новой серии сотовых телефонов. Стратегии, среди которых компании должны выбрать свою, представлены в матрице *Y*. Определите наиболее выгодную из стратегий для каждого предприятия, а также цену игры.

$$Y=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2 & 6\\ 6 & 5 & 7 & 8\\ 7 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии в матричных играх

Если партнеры играют только один раз, то игрокам целесообразно придерживаться принципа минимакса, как в игре с седловой точкой, так и в игре без седловой точки. В случае многократного повторения игры с седловой точкой игрокам также целесообразно придерживаться принципа минимакса.

Если же многократно повторяется игра без седловой точки, то постоянное использование минимаксных стратегий становится невыгодным.

Для многократно повторяемых игр без седловой точки вводится следующее определение.

В играх, которые повторяются многократно, каждая из стратегий применяемые игроками называется ***чистой*** стратегией.

Смешанная стратегия игрока – это вероятностная комбинация чистых стратегий, т. е. чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Замечание. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, когда одна из стратегий применяется с вероятностью 1, а все остальные − с вероятностью 0.

Стратегии, входящие с ненулевыми вероятностями в оптимальную стратегию игрока, называются ***активными***.

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков *A* и *B* называются такие наборы x^*, y^* соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_y \max_x M(A,\ x,\ y) = \max_x \min_y M(A,\ x^*,\ \ y^*).$$

Величина $M\left(A, x^*, y^*\right)$ называется при этом ***ценой игры*** и обозначается через V.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений системы ограничений. Однако это требует большого объема вычислений, которое растет с увеличением числа чистых стратегий игроков. Поэтому в первую очередь следует, по возможности, уменьшить число чистых стратегий игроков.

Отметим, что исключение доминируемых (*не строго*) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

В 1928 году фон Нейманом была доказана основная теорема теории игр, утверждающая, что каждая игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Поскольку все чистые стратегии являются частными случаями смешанных стратегий, то из основной теоремы теории игр можно получить

Следствие 1. Любая игра имеет цену.

Следствие 2. Цена игры удовлетворяет неравенству $\underline{\alpha} \le \nu \le \overline{\alpha}$.

Следствие 3. Средний выигрыш остается равным цене игры, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок применяет свои активные стратегии с любыми вероятностями.

Решение игр вида $2 \times n$ и $m \times 2$. Графический метод

У таких игр всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий для каждого из игроков. Если найти эти активные стратегии, то игра $2 \times n$ или $m \times 2$ сводится к игре 2×2, которую мы уже умеем решать. Поэтому игры $2 \times n$ и $m \times 2$ решают обычно графо-аналитическим методом. Рассмотрим решение матричной игры на примере.

Пример 1.

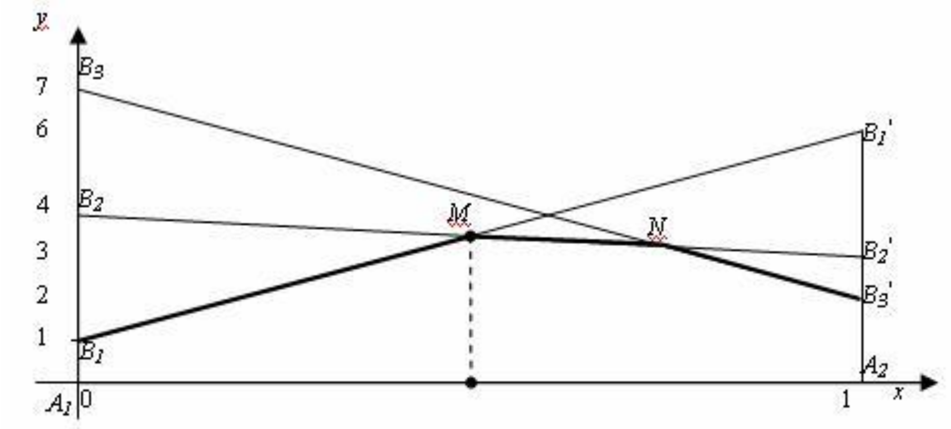
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

				$\underline{\alpha}$
	1	4	7	1
	6	3	2	2
$\overline{\alpha}$	6	4	7	2 4

$\underline{\alpha} = 2, \overline{\alpha} = 4$ т.е. $\underline{\alpha} \ne \overline{\alpha}$, поэтому игра не имеет седловой точки, и решение должно быть в смешанных стратегиях.

1. *Строим графическое изображение игры.*



Если игрок *B* применяет стратегию B_1, то выигрыш игрока *A* при применении стратегии A_1 равен $a_{11}=1$, а при использовании A_2 выигрыш равен $a_{21} = 6$, поэтому откладываем отрезки $A_1B_1=1, A_2B_1'=6$ на перпендикулярах в A_1 и A_2 и соединяем их отрезком. Аналогично для стратегий B_2 и B_3 строим отрезки $B_2\,B_2'$ и $B_3\,B_3'$.

2. *Выделяем нижнюю границу выигрыша $B_1M\,N\,B_3'$* и находим наибольшую ординату этой нижней границы, ординату точки *M*, которая равна цене игры ν.

3. *Определяем пару стратегий*, пересекающихся в точке оптимума *M*.В этой точке пересекаются отрезки B_2B_2' и B_1B_1', соответствующие стратегиям B_1 и B_2 игрока *B*. Следовательно, стратегию B_3 ему применять невыгодно. Исключаем из матрицы третий столбец и решаем игру 2×2 аналитически:

$$\begin{cases} p_1+6p_2=\nu; \\ 4p_1+3p_2=\nu; \\ p_1+p_2=1. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &p_1+6p_2=4p_1+3p_2; \\ &3p_2=3p_1; \\ &p_1=p_2=\frac{1}{2}. \end{aligned} \qquad \nu=\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} q_1+4q_2=\dfrac{7}{2}; \\ q_1+q_2=1; \end{cases} \qquad 3q_2=\frac{5}{2};\ q_2=\frac{5}{6};\ q_1=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\gamma=\dfrac{7}{2};\ P_A=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right);\ Q_B=\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{5}{6};0\right)$.

Задания для решения

1. *Решить задачи теории игр графическим методом.*

Пусть игра задана матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

2. Обувная фабрика планирует выпуск моделей обуви *A* и *B*. Спрос на эту продукцию неопределен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (1 и 2). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}.$$

Найдите оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.